Lista de Exercícios 8
MS211 - 2020/S1
Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias

---

1. Dado o PVI: $y' = 4 - 2x$; $y(0) = 2$ considere $h = 0.25$.
   a) Encontre uma aproximação para $y(1)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado;
   b) Compare seus resultados com a solução exata: $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.
   c) Podemos esperar o mesmo resultado para o método de Euler? Justifique sua resposta.

2. Use os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$ e $h = 0.25$ (cada método aplicado com os dois valores de h), para encontrar uma aproximação para $y(2)$ resolvendo o PVI: $y' = \cos x + 1$, $y(0) = -1$.

3. Considere o PVI: $y' = 1 + y/x$; $y(1) = 2$
   a) Obtenha aproximações para $y(2)$, usando o Método de Euler com $h = 0.25$;
   b) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado.

4. *a)* Escreva a fórmula de iteração para o método de Taylor de 2a. ordem aplicado ao PVI: $y' + y = x$, $y(0) = 0$ considerando $h = 0.1$;
   b) Verifique que $y(x) = \exp(-x) + x - 1$ é solução do PVI.

5. Considere o PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$
   a) Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece : $y_{k+1} = (1 + h + h^2/2)^{k+1}$;
   b) Comparando com a solução exata do problema, $y(x) = exp(x)$, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!

6. Considere o PVI: $y' = yx^2 - y$; $y(0) = 1$
   a) Encontre a solução aproximada usando o método de Euler com $h = 0.5$ e $h = 0.25$, considerando $x \in [0, 2]$;
   b) idem, usando Euler Aperfeiçoado;
   c) idem, usando Taylor de 2a. ordem.
   d) sabendo que a solução analítica do problema é $y = \exp(-x + x^3/3)$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.

7. O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial. Substitua $y'(x)$ no PVI $y' = (1/x)(2y + x + 1)$, $y(1) = 0.5$ por $(y(x + h) - y(x))/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados comparando com a solução exata: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$.

8. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, o seguinte problemas de valor de contorno (use $h = 0.25$): $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 2$ e $y(1) = 0$.

9. Formule por diferenças finitas sistemas de equações cuja solução aproxime a solução dos seguintes problemas de contorno: *a)* $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 2x, y(0) = 1, y(1) = 0$. *b)* $y'' = 2y + y^3 - x$, $y(0) = 4$ e $y(1) = 2$.
   Use $h = 0.2$

10. Considere o PVC: $y'' - y'sen(y) - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$. Escreva o sistema de equações que deverá ser resolvido para obter os valores y_i no intervalo [0,1], com espaçamento $h = 0.2$.
