Resolução de sistemas lineares

J. M. Martínez A. Friedlander

1 Alguns exemplos

Comecemos mostrando alguns exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 0.45x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 10 \\ x_2 - x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} -w + 4\alpha + z &= 4 \\ -w + 5\beta + z &= 0.42 \\ w + 4\beta + z &= 0.6 \\ -w + 2\beta + \alpha &= 0.7 \\ w + \alpha + \beta + z &= 10 \end{aligned} \tag{3}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 8 \\ y + z + w &= 6 \\ z + w &= 4 \\ w &= 2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ x &= 5 \end{aligned} \tag{6}$$

Vemos que um sistema linear consiste em um conjunto de equações, com um conjunto de *incógnitas* ou *variáveis*. As variáveis aparecem multiplicadas por um coeficiente (que pode ser 1), e o termo *variável-coeficiente* aparece somado a outros termos do mesmo tipo. Por exemplo os seguintes sistemas de equações *não são* lineares:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 5 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \tag{8}$$

2 Matriz e Termo Independente

Um sistema linear com m equações e n variáveis $(x_1, \dots, x_n)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = &\ b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = &\ b_m \end{aligned} \tag{9}$$

O retángulo de números

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

se chama **Matriz do Sistema**. O vetor $(b_1, \dots, b_m)$, se chama **Termo Independente**.

No sistema (1) temos:

Matriz =

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e termo independente $= (5, -1)$.

Em (2) : Matriz =

$$\begin{pmatrix} .45 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e termo independente $= (10, 0)$.

Em (3), ordenando as variáveis na forma (w, α, z, β) temos : Matriz =

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e termo independente $= (4, 0.42, 0.6, 0.7, 10)$.

Em (4), a matriz é:

$$(0\ 0\ 0\ 0)$$

e o termo independente =(1).

Em (5): Matriz =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e termo independente $= (8, 6, 4, 2)$.

Em (6) a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e termo independente $= (6, 5)$.

3 Soluções de um Sistema Linear

Quando um vetor $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaz todas as equações de (9), dizemos que $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma solução do sistema linear.

Por exemplo, $(1, 1)$ é uma solução de (1), $(2, 2, 2, 2)$ é uma solução de (5) e $(2.4, -1, 3)$ é uma solução de

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= \ 7.4 \\ 0x - y + 3z &= \ 10 \end{aligned} \tag{10}$$

Um sistema linear pode não ter nenhuma solução. Esse é o caso do sistema (6). Pode também ter uma única solução, como o sistema (5). E, finalmente, pode ter infinitas soluções. Por exemplo, o sistema

$$x + y = 2 \tag{11}$$

tem como soluções todos os pares (x, y) da forma $(x, 2 - x)$. Ou seja, dando valores arbitrários a x, obtemos diferentes soluções de (11). Como podemos dar infinitos valores arbitrários a x, resulta que (11) tem infinitas soluções. Assim, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0.5, 1.5)$, $(-0.3, 2.3)$, são diferentes soluções de (11).

É **impossível** que um sistema linear tenha um número **finito** de soluções diferente de 1. Ou seja, um sistema linear não pode ter duas, sete, nem 35 soluções. Se tiver mais de uma, necessariamente terá infinitas.

Um sistema com mais equações que incógnitas pode ter uma, infinitas ou nenhuma solução, embora este último caso seja o mais frequente em aplicações. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= \ -9 \\ 0x_1 + x_2 &= \ 6 \\ 5x_1 - x_2 &= \ -11 \\ -2x_1 - x_2 &= \ -4 \end{aligned} \tag{12}$$

tem a única solução $(-1, 6)$. Mas o sistema,

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= \ 1 \\ 2x + 4y - 2z &= \ 2 \\ 3x + 6y - 3z &= \ 3 \\ 4x + 8y - 4z &= \ 4 \end{aligned} \tag{13}$$

tem como soluções todos os vetores da forma $(x, y, x+2y-1)$. (Confira). E, finalmente,

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 3 \\ x &= 5 \\ x+y &= 6 \end{aligned} \tag{14}$$

não tem nenhuma solução.

Da mesma maneira, um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 4x-2y &= 4 \\ x-3y &= 1 \end{aligned} \tag{15}$$

tem a única solução $(1, 0)$. Mas

$$\begin{aligned} x-y &= 5 \\ x-y &= 10 \end{aligned} \tag{16}$$

não tem solução. E, finalmente,

$$\begin{aligned} x-y &= 5 \\ -x+y &= -5 \end{aligned} \tag{17}$$

tem infinitas soluções. (Todos os pares da forma $(x, x-5)$).

Finalmente, um sistema com mais incógnitas que equações pode não ter soluções, como

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 9 \\ 2x_1+2x_2-2x_3 &= 40 \end{aligned} \tag{18}$$

ou ter infinitas soluções, como

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 9 \\ 2x_1+2x_2-2x_3 &= 18, \end{aligned} \tag{19}$$

mas jamais pode ter solução única. O leitor será convencido deste fato mais adiante no texto.

4 Sistemas escalonados

Os sistemas escalonados são os mais fáceis para resolver ou para perceber que não tem solução. Vejamos alguns exemplos deste tipo de sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4 &= 5 \\ -x_2+4x_3-2x_4 &= 6 \\ -x_3+4x_4 &= 8 \\ 5x_4 &= 10 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ x_2+x_3 &= 9 \end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
4y - 0w + 6z - x &= \; 8 \\
2w + 0z + 0x &= \; 6 \\
z + 0x &= \; 4
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
6x_3 + 2x_1 + 4x_4 + x_5 &= \; 9 \\
0x_3 + 4x_1 + 0x_4 \quad\; &= \; 8 \\
0x_3 + 0x_1 + 2x_4 + x_5 &= \; 10 \\
0x_3 + 0x_1 + 0x_4 + 0x_5 &= \; 4
\end{aligned} \tag{23}
$$

O que os sistemas (20)-(23) tem em comum é que na primeira equação aparece uma variável com coeficiente diferente de zero, que não aparece em nenhuma das equações restantes. O mesmo acontece na segunda equação, e na terceira, etc...., até que acabam as equações ou começam a aparecer equações onde todos os coeficientes de variáveis são nulos.

A matriz de um sistema escalonado tem a seguinte forma

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & a_{pp} & \dots & a_{pn} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix} \tag{24}
$$

onde, necessariamente, $a_{11}, \dots, a_{pp}$ não são nulos. Por exemplo as seguintes são matrizes de sistemas escalonados:

$$
A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
$$

$$
C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

5 Resolução de sistemas escalonados

Reconhecer se um sistema escalonado não tem solução é imediato. Isto acontece quando alguma das $m-p$ últimas equações se reduz a $0 = b_i$ e $b_i \neq 0$. Por exemplo, o seguinte sistema escalonado

$$\begin{aligned} 4x+2y+5z &= 6 \\ 0x+3y-7z &= 2 \\ 0x+0y+0z &= 5 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{aligned}$$

não tem nenhuma solução, porque a terceira equação diz que $0=5$. Em qualquer outro caso os sistemas escalonados tem solução. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+4x_3 &= 6 \\ 5x_2-2x_3 &= 8 \\ 3x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{25}$$

Da terceira equação de (25) deduzimos que $x_3=1$. Substituindo este valor na segunda equação resulta que

$$5x_2-2=8,$$

portanto $x_2=2$. Substituindo x_2 e x_3 na primeira equação, temos que

$$2x_1-2+4=6,$$

e resulta $x_1=2$. Assim, provamos que $(2,2,1)$ é a **única** solução de (25).

Consideremos agora o sistema

$$\begin{aligned} 4x-2y+z-w &= 6 \\ y-z+w &= 8 \end{aligned} \tag{26}$$

Colocando y em evidência na segunda equação temos

$$y=8+z-w \tag{27}$$

Substituindo (27) na primeira equação de (26), obtemos

$$4x-2(8+z-w)+z-w=6. \tag{28}$$

Portanto

$$x=5.5+0.25z-0.25w \tag{29}$$

Deduzimos de (27) e (29) que qualquer vetor da forma $(5.5+0.25z-0.25w, 8+z-w, z, w)$ é solução de (26). Ou seja, dando valores arbitrários a z e w, obtemos diferentes soluções deste sistema. Por exemplo, fixando $z=0,\ w=0$, obtemos a solução $(5.5,8,0,0)$. Se $z=0.34,\ w=-1.23$, obtemos a solução $(5.8925, 9.57, 0.34, -1.23)$. O sistema tem infinitas soluções. Diremos que $(5.5+0.25z-0.25w, 8+z-w, z, w)$ é a solução **geral** do sistema (26). Como nesta solução geral aparecem duas variáveis livres (z e w), diremos que o conjunto de soluções de (26) tem dois **graus de liberdade**.

O procedimento usado nos dois exemplos anteriores pode ser generalizado para resolver qualquer sistema linear escalonado. Vamos esquematizar esse processo através do seguinte **algoritmo**.

Algoritmo 1.1
Suponhamos que

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + \dots & \dots & \dots & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 & \\
 & a_{22}x_2 & + \dots & \dots & \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 & \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots & \\
 & & & a_{pp}x_p + & \dots & +a_{pn}x_n & = & b_p & (30)\\
 & & & & & 0 & = & b_{p+1} & \\
 & & & & & \vdots & = & \vdots & \\
 & & & & & 0 & = & b_m &
\end{array}$$

é um sistema escalonado (se $p = m$, as $m-p$ últimas equações não aparecem). Para resolver (30), ou detectar que não tem solução executamos os seguintes passos.

Passo 1. Se algum dos números $b_{p+1}, \dots, b_m$ é diferente de zero, (30) não tem solução. Em caso contrário, quando todos os b_i, $i = p+1, \dots, m$ são nulos ou $p = m$, o sistema tem solução e podemos passar ao passo seguinte.

Passo 2. Colocar em evidência x_p na equacão p. Assim, obtemos uma expressão de x_p em função de $x_{p+1}, \dots, x_n$. (Se $p = n$, x_p ficará igual a um número). Substituir a expressão obtida para x_p nas equações $p-1, p-2, \dots, 1$. Agora, x_p não aparecerá mais nas equações. Se $p = 1$, o algoritmo termina aqui.

Passo 3. Começando por $i = p-1$ e terminando por $i = 1$, proceder com a variável x_i e a equação i da mesma maneira como fizemos com a equação p e a variável x_p. Ou seja, colocar em evidência x_i na equação i, de modo que teremos uma expressão para x_i em função de $x_{p+1}, \dots, x_n$. (Será um número se $p = n$). Depois, substituir esta expressão de x_i nas equações $i-1, i-2, \dots, 1$.

Vamos aplicar o Algoritmo 1.1 a um novo exemplo. A particularidade que introduziremos é que as operações serão efetuadas sempre usando apenas quatro dígitos. Isto introduzirá um erro de arrendondamento na resolução do sistema. Por exemplo, na operação 2.372x9.965 escreveremos 23.64 como resultado, apesar de que o resultado sem arrendondar é 23.63698. De fato, é dessa forma que os computadores fazem contas embora usando mais de quatro dígitos. Consideremos, então, o sistema

$$\begin{aligned} 3a - 2b + 1.5c - d &= 2 \\ 1.3b + 4c + d &= 6 \\ -1.2c - 3d &= 8 \end{aligned} \tag{31}$$

Colocando c em evidência na terceira equação , temos

$$c = -2.5d - 6.667$$

e substituindo c nas duas primeiras equações, estas se transformam em

$$\begin{aligned} 3a - 2b + 1.5(-2.5d - 6.667) - d = &\quad 2 \\ 1.3b + 4(-2.5d - 6.667) + d = &\quad 6, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} 3a - 2b - 4.75d = &\quad 12 \\ 1.3b - 9d = &\quad 32.67 \end{aligned}$$

Pomos b em evidência na segunda equação do sistema modificado e obtemos

$$b = 25.13 + 6.923d.$$

Substituindo b por esta expressão na primeira equação do sistema modificado, resulta

$$3a - 2(25.13 + 6.923d) - 4.75d = 12$$

ou seja,

$$3a - 18.6d = 62.26.$$

Portanto,

$$a = 20.75 + 6.2d$$

Então, temos expressões para a, b e c em função de d e a solução geral do sistema é

$$(20.75 + 6.2d, 25.13 + 6.923d, -6.667 - 2.5d, d).$$

Como era de se esperar, esta solução geral tem um grau de liberdade. De fato, o número de graus de liberdade na solução geral de um sistema escalonado é sempre $n - p$.

Tomando valores arbitrários de d, obtemos diferentes soluções do sistema (31). Para $d = 0$ e $d = 1$ obtemos respectivamente $(20.75, 25.13, -6.667, 0)$ e $(26.95, 32.05, -9.167, 1)$. Substituindo estas soluções em (31), vemos que elas não satisfazem exatamente as equações. (Confira). Isto se deve a que as contas não foram feitas exatamente, mas apenas com quatro dígitos. Se usarmos mais dígitos em nossas contas, obteremos maior precisão no resultado final.

6 Resolução de sistemas triangulares

Os sistemas escalonados com igual número de equações e incógnitas (nxn), se chamam sistemas triangulares. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 6x - 4z + w - 2a = &\quad 5 \\ -z - w - a = &\quad 9 \\ 4w + a = &\quad 8 \\ 3a = &\quad 2.3, \end{aligned} \tag{32}$$

e a matriz deste sistema é

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Devido a que nenhum elemento da diagonal da matriz é nulo, os sistemas triangulares tem solução **única**.

Vamos resolver (32) usando quatro dígitos nas operações. Da quarta equação obtemos

$$a = 7.667$$

e substituindo este valor em todas as equações anteriores resulta

$$\begin{aligned} 6x - 4z + w &= \;\; 20.33 \\ -z - w &= \;\; 16.67 \\ 4w &= \;\; 0.333. \end{aligned} \tag{33}$$

O sistema (33) também é triangular com uma incógnita e uma equação menos que (32). Colocando agora w em evidência, temos

$$w = 0.08325,$$

e substituindo este valor em (33) resulta

$$\begin{aligned} 6x - 4z &= \;\; 20.25 \\ -z &= \;\; 16.75. \end{aligned} \tag{34}$$

Portanto, substituindo o valor de z na primeira equação de (34) e pondo em evidência x nesta equação, resulta que a única solução de (32) é $(-7.792, -16, 75, 0.08325, 7.667)$.

Substituindo esta solução em (32), vemos de novo que, devido aos erros de arrendondamento, a solução obtida não satisfaz exatamente as quatro equações, mas está muito perto de fazê-lo. (Confira).

7 Redução de um sistema linear à forma escalonada

ELIMINAÇÂO GAUSSIANA

Já vimos que sistemas escalonados são fáceis de resolver. Nesta seção veremos que qualquer sistema linear pode ser reduzido a um sistema escalonado, ao qual é equivalente. Dois sistemas são equivalente se e somente se os dois sistemas tem o mesmo conjunto de soluções. (Este conjunto pode ser vazio, neste caso os dois sistemas não admitem nenhuma solução). Dessa maneira, poderemos resolver qualquer sistema linear. Usaremos os seguintes fatos:

1. Se alteramos a ordem das equações, o sistema resultante é equivalente ao original. Por exemplo, o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4u + v &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3u - v &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 4u + v &= 8 \end{aligned} \tag{35}$$

   é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 + 4u + v &= 8 \\ 3x_1 - x_2 + 4u + v &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3u - v &= 6 \end{aligned} \tag{36}$$

2. Se alteramos a ordem dos termos nas equações do sistema , resulta um sistema equivalente. Por exemplo, (38) é equivalente a

$$\begin{aligned} 4u + v - x_2 + 3x_1 &= 1 \\ 3u - v - 2x_2 + 6x_1 &= 6 \\ 4u + v + 3x_2 - x_1 &= 8 \end{aligned} \tag{37}$$

3. Se substituímos uma equação por **ela mesma mais um múltiplo de outra**, resulta um sistema equivalente. Por exemplo, no sistema (38) vamos substituir a segunda equação por *ela mesma* + 1.73× *(a primeira equação)*. Assim, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4u + v &= 1 \\ 11.19x_1 - 3.73x_2 + 9.92u - 0.73v &= 7.73 \\ -x_1 - 3x_2 + 4u + v &= 8, \end{aligned} \tag{38}$$

cujo conjunto de soluções é o mesmo que o conjunto de soluções de (38).

Agora veremos como utilizar estas três regras para reduzir um sistema qualquer à forma escalonada. Pensemos no sistema (38). Se ele fosse escalonado, o coeficiente da primeira variável na primeira equação seria diferente de zero (como de fato é, neste caso), mas os coeficientes da primeira variável na segunda e terceira equação deveriam ser zeros. Por enquanto, isso não está acontecendo. mas, vejamos que acontece se substituímos a segunda equação por *ela mesma* $+ (-\frac{6}{3})\times$*(a primeira equação)*. (Em símbolos $II \leftarrow II + (-\frac{6}{3})I$). Obteremos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4u + v &= \ 1 \\ 0x_1 - 0x_2 - 5u - 3v &= \ 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 4u + v &= \ 8 \end{aligned} \tag{39}$$

O sistema (39), equivalente a (38) ainda não tem um zero como coeficiente da primeira variável na terceira equação. Porem, substituíndo a terceira equação por *ela mesma* $+ (\frac{1}{3})\times$*(a primeira equação)*, $(III \leftarrow III + (\frac{1}{3}) \times I)$ obtemos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4u + v &= \ 1 \\ 0x_1 - 0x_2 - 5u - 3v &= \ 4 \\ 0x_1 - \tfrac{10}{3}x_2 + \tfrac{16}{3}u + \tfrac{4}{3}v &= \ \tfrac{25}{3} \end{aligned} \tag{40}$$

Se o sistema (40) fosse escalonado, o coeficiente da segunda variável na segunda equação deveria ser diferente de zero. neste caso, porem, esse coeficiente é zero. Mas se permutamos a segunda e a terceira equações de (40), obtemos

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4u + v &= \ 1 \\ 0x_1 - \tfrac{10}{3}x_2 + \tfrac{16}{3}u + \tfrac{4}{3}v &= \ \tfrac{25}{3} \\ 0x_1 - 0x_2 - 5u - 3v &= \ 4 \end{aligned} \tag{41}$$

Em um sistema escalonado, o coeficiente da segunda variável na terceira equação deveria ser zero. Isto já acontece no sistema (41). Podemos passar a analisar a terceira variável. Em um sistema escalonado, o coeficiente desta variável na terceira equação deve ser diferente de zero. Isto já acontece no sistema (41). Como não existem mais equações, o processo de escalonamento terminou. De fato, o sistema (41) é escalonado, e podemos resolvé-lo usando a técnica da seção 1.5.

Vejamos outro exemplo

$$\begin{array}{cl} I & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = \ 2 \\ II & 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 2x_5 = \ 7 \\ III & -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = \ -1 \end{array} \tag{42}$$

Como o coficiente da primeira variável em I é diferente de zero, não é necessária nenhuma permutação no começo. para que o coeficiente da primeira variável em II se anule, substituímos $II \leftarrow II - \frac{4}{2}I$. assim, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{array}{cl} I & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = \ 2 \\ II & 0x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 0x_5 = \ 3 \\ III & -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = \ -1 \end{array} \tag{43}$$

Para fazer aparecer um zero como coeficiente da primeira variável em III, substituímos $III \leftarrow III + I$, e obtemos o sistema equivalente

$$
\begin{array}{lr}
I & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = \quad 2 \\
II & 0x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 0x_5 = \quad 3 \\
III & 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = \quad 1
\end{array} \tag{44}
$$

Para ter um sistema escalonado, o coeficiente da segunda variável na segunda equação deve ser diferente de zero. Em (44) este coeficiente é nulo. Portanto, alguma permutação é necessária. Se permutamos as equações II e III não resolvemos nada. Permutar I com II ou com III, também não serve, porque isso faria aparecer um zero como coeficiente da primeira variável em I, e um coeficiente não nulo desta variável em II ou III, o que estragaria o trabalho feito para obter (44). Porem, podemos fazer aparecer um coeficiente não nulo na segunda variável se aplicarmos a regra 2, trocando a ordem das variáveis. Assim, fazendo que x_2 passe a ser a terceira variável e x_3 a segunda, obtemos o sistema equivalente

$$
\begin{array}{lr}
I & 2x_1 + 4x_3 - 3x_2 - x_4 + x_5 = \quad 2 \\
II & 0x_1 - 5x_3 + 0x_2 - 3x_4 + 0x_5 = \quad 3 \\
III & 0x_1 + 3x_3 + 0x_2 - 3x_4 + 5x_5 = \quad 1
\end{array} \tag{45}
$$

Agora, para zerar o coeficiente da segunda variável na terceira equação, substituímos $III \leftarrow III + \frac{3}{5}II$, e obtemos

$$
\begin{array}{lr}
I & 2x_1 + 4x_3 - 3x_2 - x_4 + x_5 = \quad 2 \\
II & 0x_1 - 5x_3 + 0x_2 - 3x_4 + 0x_5 = \quad 3 \\
III & 0x_1 + 0x_3 + 0x_2 - \frac{24}{5}x_4 + 5x_5 = \quad \frac{14}{5}
\end{array} \tag{46}
$$

Finalmente , em um sistema escalonado, o coeficiente da terceira variável na terceira equação deve ser não nulo. Para que isso aconteça, vamos trocar mais uma vez ordem das variáveis, desta vez em (45). Assim obtemos

$$
\begin{array}{lr}
I & 2x_1 + 4x_3 - x_4 - 3x_2 + x_5 = \quad 2 \\
II & 0x_1 - 5x_3 - 3x_4 + 0x_2 + 0x_5 = \quad 3 \\
III & 0x_1 + 0x_3 - \frac{24}{5}x_4 + 0x_2 + 5x_5 = \quad \frac{14}{5}
\end{array} \tag{47}
$$

O sistema (46) é escalonado e pode ser resolvido pela técnica da seção 1. Obteremos então uma solução geral com dois graus e liberdade. O leitor pode verificar que x_2 e x_5 são as variáveis livres nessa solução geral.

8 Questões numéricas

Ao final do processo de eliminação gaussiana podemos reconhecer se um sistema linear tem uma, infinitas ou nenhuma solução, já que isso é fácil nos sistemas escalonados. Quando um sistema não tem solução algumas das equações $p+1, \ldots, , m$ do sistema escalonado, tem a forma $0 = b$, com $b \neq 0$. Quando operamos com um computador, ou uma calculadora, não fazendo as contas exatamente, mas trabalhando com um certo número de dígitos significativos, há alguns problemas que devem ser considerados. Por exemplo, no seguinte sistema operaremos com quatro dígitos

$$\begin{array}{rrl} I & 1.32x_1 - 5.23x_2 + 0.432x_3 = & -2.45 \\ II & 0.27x_1 + 0.82x_2 - 3.21x_3 = & 6.21 \\ III & 1.59x_1 - 4.41x_2 - 2.779x_3 = & 2.94 \end{array} \tag{48}$$

Fazendo $II \leftarrow II + (-\frac{0.27}{1.32})I$, obtemos

$$\begin{array}{rrl} I & 1.32x_1 - 5.23x_2 + 0.432x_3 = & -2.45 \\ II & 0x_1 + 1.89x_2 - 3.298x_3 = & 6.711 \\ III & 1.59x_1 - 4.41x_2 - 2.779x_3 = & 2.94 \end{array} \tag{49}$$

Fazendo $III \leftarrow III + (-\frac{1.59}{1.32})I$, obtemos

$$\begin{array}{rrl} I & 1.32x_1 - 5.23x_2 + 0.432x_3 = & -2.45 \\ II & 0x_1 + 1.89x_2 - 3.298x_3 = & 6.711 \\ III & 0x_1 + 1.89x_2 - 3.299x_3 = & 5.891 \end{array} \tag{50}$$

Fazendo $III \leftarrow III + (-1)II$, obtemos

$$\begin{array}{rrl} I & 1.32x_1 - 5.23x_2 + 0.432x_3 = & -2.45 \\ II & 0x_1 + 1.89x_2 - 3.298x_3 = & 6.711 \\ III & 0x_1 + 0x_2 - 0.001x_3 = & -0.82 \end{array} \tag{51}$$

Aparentemente, o sistema tem solução única, e podemos encontrar essa solução resolvendo (51). Assim,

$x_3 = 820 \quad x_2 = 1427 \quad x_3 = 5387$

Porém, o coeficiente -0.001 que apareceu na terceira equação, muito pequeno em relação aos outros, nos faz duvidar. Se esse coeficiente tivesse sido nulo, teriamos declarado que o sistema não tem solução. Talvez, o *verdadeiro* coeficiente é zero, e o número pequeno diferente de zero apareceu apenas pelos inevitáveis erros de arredondamento. É possível saber se esse número é um *verdadeiro não zero* ou um *zero camuflado*? Infelizmente, não há nenhuma garantia. É recomendável trabalhar com *tolerâncias* do seguinte tipo: se o *coeficiente duvidoso* tem valor absoluto menor que, digamos $10^{-6}\times$ (o máximo valor absoluto entre os elementos da matriz do sistema original), declarar que ele é zero. De qualquer forma, essa regra não impede que possamos tomar decisões erradas. Em situações análogas às do problema (48) é recomendável não fazer nenhuma aposta em relação à correção da decisão tomada. Via de regra, quando um problema prático nos leva a um sistema linear desse tipo, é conveniente procurar alguma maneira alternativa de resolver o problema prático.

As vezes, podemos evitar que um número *que não sabemos se é zero ou não* prejudique muito nossos cálculos. Por exemplo, no seguinte sistema linear

$$\begin{array}{rrr} I & 10^{-9}x_1 + x_2 = & 1 \\ II & x_1 + x_2 = & 2 \end{array} \tag{52}$$

Se o número muito pequeno 10^{-9} fosse zero, a solução de este sistema seria $(1,1)$. Portanto, podemos imaginar que a solução de (52) está muito próxima de $(1,1)$. Vamos resolver o sistema fazendo eliminação gaussiana. Trabalhamos com quatro dígitos significativos. Fazendo $II \leftarrow +(-\frac{1}{10^{-9}})I$ resulta

$$\begin{array}{rrr} I & 10^{-9}x_1 + x_2 = & 1 \\ II & 0x_1 - 10^{9}x_2 = & -10^{-9} \end{array} \tag{53}$$

Portanto, $x_2 = 1$ e $x_1 = 0$. (Confira). Então , por este procedimento, obtemos a *solução* $(0,1)$ que, certamente , é ruim. Ela está muito longe de satisfazer a segunda equação de (52). Vamos resolver (52) de forma ligeiramente diferente. Como parece que a razão do péssimo resultado é que o coeficiente da primeira variável na primeira equação era muito pequeno, vamos evitar essa situação. Permutamos as equações antes de fazer a eliminação gaussiana. Assim, temos

$$\begin{array}{rrr} I & x_1 + x_2 = & 2 \\ II & 10^{9}x_1 + x_2 = & -1 \end{array} \tag{54}$$

Agora, fazendo $II \leftarrow II + (-10^{-9})I$, operando com quatro dígitos obtemos

$$\begin{array}{rrr} I & x_1 + x_2 = & 2 \\ II & 0x_1 + x_2 = & -1 \end{array} \tag{55}$$

Portanto, $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$, solução que deve estar muito perto da verdadeira.

Do exemplo (52) tiramos a seguinte conclusão: é inconveniente que, no processo da eliminação gausiana de um sistema linear, o coeficiente da i-éssima variável na i-éssima equação, denominado **pivô**, seja pequeno em relação aos outros. Para evitar, no possível, que isso aconteça é recomendável permutar as equações de maneira que o coeficiente da variável i na equação i, tenha o maior valor absoluto possível. Esta estrateégia é conhecida como **Estratégia de Pivotamento Parcial**.

Vejamos outro eemplo. Resolveremos o seguinte sistema linear usando a estratégia de pivotamento parcial.

$$\begin{array}{rrr} I & 0.001x_1 + 3x_2 - 0.25x_3 - 2x_4 = & 1.23 \\ II & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ III & 6x_1 + 492x_2 - 10.3x_3 - 2x_4 = & 4.84 \\ IV & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = & 2.2 \end{array} \tag{56}$$

Permutamos I e II para que o coeficiente de x_1 tenha o maior valor absoluto possível e temos

$$\begin{array}{rrr} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 0.001x_1 + 3x_2 - 0.25x_3 - 2x_4 = & 1.23 \\ III & 6x_1 + 492x_2 - 10.3x_3 - 2x_4 = & 4.84 \\ IV & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = & 2.2 \end{array} \tag{57}$$

A partir de (57), efetuamos as substituições

$$\begin{array}{c} II \leftarrow II + (-\frac{0.001}{583})I \\ III \leftarrow III + (-\frac{6}{583})I \\ IV \leftarrow IV + (-\frac{2}{583})I \end{array} \tag{58}$$

e obtemos

$$\begin{array}{rcl} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 0x_1 + 3x_2 - 0.25x_3 - 2x_4 = & 1.23 \\ III & 0x_1 + 492x_2 - 10.29x_3 - 2.026x_4 = & 4.83 \\ IV & 0x_1 + 3x_2 + 4.003x_3 - 1.009x_4 = & 2.197 \end{array} \tag{59}$$

permutando II eIII, para que o valor absoluto do coeficiente da segunda variável na segunda equação seja o maior possível, temos

$$\begin{array}{rcl} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 0x_1 + 492x_2 - 10.29x_3 - 2.026x_4 = & 4.83 \\ III & 0x_1 + 3x_2 - 0.25x_3 - 2x_4 = & 1.23 \\ IV & 0x_1 + 3x_2 + 4.003x_3 - 1.009x_4 = & 2.197 \end{array} \tag{60}$$

Agora, substituindo

$$\begin{array}{c} III \leftarrow III + (-\frac{3}{492})II \\ IV \leftarrow IV + \frac{3}{492}II \end{array} \tag{61}$$

obtemos

$$\begin{array}{rcl} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 0x_1 + 492x_2 - 10.29x_3 - 2.026x_4 = & 4.83 \\ III & 0x_1 + 0x_2 - 0.1873x_3 - 1.988x_4 = & 1.201 \\ IV & 0x_1 + 0x_2 + 3.94x_3 - 1.021x_4 = & 2.226 \end{array} \tag{62}$$

Permutando III e IV, para que o valor absoluto do coeficiente da terceira variável na terceira equação seja o maior possível, obtemos

$$\begin{array}{rcl} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 0x_1 + 492x_2 - 10.29x_3 - 2.026x_4 = & 4.83 \\ III & 0x_1 + 0x_2 + 3.94x_3 - 1.021x_4 = & 2.226 \\ IV & 0x_1 + 0x_2 - 0.1873x_3 - 1.988x_4 = & 1.201 \end{array} \tag{63}$$

Finalmente, substituindo $IV \leftarrow IV + \frac{0.1873}{3.94}III$, resulta

$$\begin{array}{rcl} I & 583x_1 + 0.02x_2 - x_3 - 2.5x_4 = & 0.93 \\ II & 492x_2 - 10.29x_3 - 2.026x_4 = & 4.83 \\ III & 3.94x_3 - 1.021x_4 = & 2.226 \\ IV & -2.037x_4 = & 1.307 \end{array} \tag{64}$$

Este último sistema é escalonado, mais precisamente triangular.

Outra técnica que ajuda a diminuir o erro de arredondamento na resolução de um sistema linear é a chamada **escalamento**. antes de começar a resolver o sistema, se divide cada equação pelo coeficiente dessa equação com maior valor absoluto. Se obtem assim, um sistema equivalente, onde geralmente haverá menos problemas causados pelo arredondamento. Por exemplo no sistema (56) dividimos a primeira equação por 3, a segunda por 583, a terceira por 492 e a quarta por 4. Obtemos o seguinte sistema equivalente equivalente a (56).

$$\begin{array}{ccc} I & 0.0003333x_1 + x_2 - 0.08333x_3 - 0.6667x_4 = & 0.41 \\ II & x_1 + 3.431x10^{-5}x_2 - 1.715x10^{-3}x_4 + 4.288x10^{-3}x_4 = & 7.033x10{-}4 \\ III & 0.0122x_1 + x_2 - 0.02093x_3 - 4.065x10^{-3}x_4 = & 9.837x10^{-3} \\ IV & 0.5x_1 0.75x_2 + x_3 - 0.25x_4 = & 0.55 \end{array} \tag{65}$$

9 Fatoração LU

Dada uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ veremos como decompor essa matriz em um produto de duas matrizes triangulares L e U. L é triangular inferior e tal que para todo $i = 1, \ldots n$, $l_{ii} = 1$. U é uma matriz triangular superior.

Consideremos, por exemplo as seguintes matrizes

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A = LU = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -1.5 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Vamos a triangular a matriz A usando eliminação gaussiana sem pivotamento.

Definimos os multiplicadores $m_{21} = -\frac{6}{3} = -2$ e $m_{31} = -\frac{-3}{3} = 1$. Para zerar os elementos da primeira coluna a partir da segunda linha fazemos $II \leftarrow II + m_{21}I$ e $III \leftarrow III + m_{31}I$. A matriz resultante destas operações é

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O próximo passo é zerar o elemento da terceira linha e segunda coluna. Usamos o multiplicador $m_{32} = -\frac{1}{0.5} = -2$ e fazemos $III \leftarrow III + m_{32}II$ obtendo

$$A'' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A'' = U$ e que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando uma matriz quadrada A pode ser decomposta como produto de L e U com as propriedades dadas acima, o processo de eliminação gaussiana sem pivotamento, ou seja sem permutações de linhas, nos fornece ambos fatores, generalizando o que observamos no exemplo dado. Acontece que nem sempre é possível decompor uma matriz desta forma. Por exemplo, a seguinte matriz não admite essa decomposição.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entretanto, se permutarmos as linhas desta matriz, a fatoração é trivial com $L = U = I$.

Mas, vejamos que acontece se fazemos eliminação gaussiana da matriz A de (66) com pivotamento parcial. Como o maior coeficiênte em valor absoluto na primeira coluna é o elemento $a_{21} = 6$ permutamos as linhas 1 e 2, obtendo

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & -1.5 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os multiplicadores agora são $m_{21} = -0.5$ e $m_{31} = 0.5$ e fazendo $II \leftarrow II + m_{21}I$ e $III \leftarrow III + m_{31}I$, obtemos

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & -1.5 & 5 \\ 0 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1.25 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Agora permutamos as linhas 2 e 3 e resulta

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & -1.5 & 5 \\ 0 & 1.25 & 1.5 \\ 0 & -0.25 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Usamos o multiplicador $m_{32} = 0.2$ para fazer $III \leftarrow III + m_{32}II$ e finalmente obtemos

$$U = \begin{pmatrix} 6 & -1.5 & 5 \\ 0 & 1.25 & 1.5 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Se, de forma apressurada, construímos a matriz L como fizemos para (66), ou seja

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

veremos que $LU \neq A$ neste caso. (O leitor pode verificar isto).

Respeitando a ordem que corresponde às linhas na matriz U, a matriz A original permutada resulta

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1.5 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mas, também $LU \neq \tilde{A}$. (Verifique).

Se fazemos a eliminação gaussiana com pivotamento parcial sobre a matriz $\tilde{A}$, veremos que não haverá necessidade de nenhuma permutação e a U resultante é exatamente a obtida em (67), e neste caso o fator triangular inferior é

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja $\tilde{A} = L'U$. (Observe a diferença entre L e L'). Portanto, quando fazemos eliminação gaussiana com pivotamento parcial não obtemos uma fatoração da A original mas de uma permutação da A e devemos respeitar as permutações das linhas na formação da matriz triangular inferior$L$.

Denotamos $\tilde{A} = PA$, onde a P representa as permutações das linhas que fizemos. O resultado do processo feito é $PA = L'U$

O leitor interessado em um estudo mais rigoroso sobre a fatoração LU deve consultar a bibliografia do curso e/ou procurar bibliografia alternativa através por exemplo da Wikipedia.

A fatoração LU, consiste mais precisamente em uma forma de implementação da eliminação gaussiana. Na matriz L guardamos a informação necessária para fazer as operações entre as linhas das sucessivas matrizes do processo da eliminação gaussiana (respeitando as permutações). Devemos guardar de alguma forma a informação sobre as permutações das linhas feitas durante o processo. A operação P nos dará esta informação. Então, se temos a fatoração $PA = LU$ dada, cada vez que precisemos resolver um sistema linear onde a matriz associada seja A, ou seja , achar x tal que $Ax = b$, usamos esta fatoração. Resolvemos o sistema linear equivalente $LUx = PAx = Pb$. Observe que Pb é simplesmente o termo independente com a ordem das linhas permutadas da mesma forma como foram permutadas as linhas da matriz.

Para obter a solução do sistema $Ax = b$, resolvemos primeiro o sistema triangular $Ly = Pb$. A resolução deste sistema triangular inferior equivale a fazer sobre o vetor Pb todas as operações que foram feitas sobre a matriz original (permutada de acordo com P) para obter a matriz triangular inferior U, resultando o vetor y. Uma vez obtido y resolvemos o sistema triangular superior $Ux = y$ para obter a solução x do sistema original.

Se queremos resolver o mesmo sistema, mas para valores diferentes de b, não precisamos fazer de novo a eliminação gaussiana cada vez. Usamos a fatoração e só precisamos resolver os dois sistemas triangulares. É claro, que isto será vantajoso se temos muitos valores diferentes de b. Um exemplo interessante onde isto acontece é quando queremos calcular a inversa de uma matriz com n muito grande.